ALLAR VEELMAA

MATEMAATIKA

GÜMNAASIUMIKURSUSE KORDAMINE

TALLINN “MATHEMA” 2009

Kirjastus Mathema kinnitab: õpik vastab põhikooli ja gümnaasiumi riiklikule õppekavale ning haridus- ja teadusministri poolt õppekirjandusele kehtestatud nõuetele.

Retsenseerinud Hele Kiisel ja Agu Ojasoo.

Kaaned kujundanud Heiki Looman.

Joonised teinud Allar Veelmaa.

Autor tänab retsensente paljude kasulike märkuste ja nõuannete eest ning kolleeg Tõnu Tõnsot käsikirja toimetamise eest. Samuti tänab autor paljusid Loo Keskkooli õpilasi, kes on ülesannete koostamiseks inspiratsiooni andnud.

ISBN 978-9985-9385-4-6

EESSÕNA

Paljude gümnaasiumite matemaatika ainekava lõpeb kursusega "Kordamine". Et ees seisavad riigieksamid, siis on antud välja päris palju erinevaid riigieksami ülesannete kogusid. Paraku on nende puhul tegemist ülesannete kogudega, aga mitte õppematerjalidega, mis on mõeldud gümnaasiumkursuse *süstemaatiliseks kordamiseks*. Käesolev raamat on mõeldud aga just ennekõike gümnaasiumikursuse kordamiseks.

Kindlasti saab ka seda raamatut kasutada riigieksamiteks valmistumiseks, aga samas tuleks endale aru anda – matemaatikat õpitakse ju mitte selleks, et eksam kuidagiviisi ära teha, vaid ikka selleks, et targemaks saada ja hiljem osata oma teadmisi eluliste ülesannete lahendamisel kasutada.

Käesolevast raamatust peaks sellest olema kasu ka neile, kel on keskkool juba lõpetatud. Selleks, et ülikoolis paremini hakkama saada, vajab keskkoolis õpitu ju meeldetuletamist. Kui teadmistes on lünki ja paljude keskkooli matemaatikaülesannete lahendamine käib üle jõu, siis võib lünkade kaotamisel abi olla ka käesolevast raamatust.

Raamatus on toodud ära ülesannete lahendamiseks vajalik teoreetiline materjal koos näiteülesannete põhjalikult kommenteeritud lahendustega. Iseseisvaks lahendamiseks on välja pakutud 618 ülesannet.

Lühidalt sisust:

Õppematerjal on jaotatud kolmeteistkümneks teemaks:

1. Reaalarvud ja avaldised.
2. Võrrandid ja võrrandisüsteemid.
3. Võrratused ja võrratusesüsteemid.
4. Aritmeetiline ja geomeetriline jada.
5. Funktsiooni uurimine ilma tuletiseta.
6. Trigonomeetria.
7. Jada ja funktsiooni piirväärtus.
8. Funktsiooni tuletis, selle rakendusi.

9. Integraal ja selle rakendusi.
10. Vektorid. Joone võrrand.
11. Planimeetria.
12. Stereomeetria.
13. Tõenäosusteooria ja statistika.

Kuidas seda raamatut kasutada?

Gümnaasiumikursuse kordamiseks mõeldud raamatut saab kasutada kogu gümnaasiumikursuse vältel lisaks õpikule, kus mõne teema juures on ülesandeid vähevõitu või tunduvad need liiga lihtsatena. Asendamatuks abimeheks on see raamat aga eksamieelsel kordamisel, et saaks meelde tuletada vajalikke valemeid, uurida näiteülesannete lahendusi ja loomulikult ka ise ülesandeid lahendada.

Ülesandeid väga erineva raskusastmega – alates lihtsatest, lõpetades tavapärastest riigieksami ülesannetest keerukamatega.

Iga teema kordamisel veenduge, kas kirjapandud valemid tulevad ikka tuttavad ette. Uurige ka põhjalikult õpikus olevaid näiteid. Algul on mõistlik ära lahendada ülesanded, millega saate kindlasti hakkama (oma vastuseid saate võrrelda raamatu lõpus olevate vastustega). Siis võtke käsile juba veidi keerukamad ülesanded. Paljusid ülesandeid saab lahendada mitmel erineval viisil. Püüdke ka ise leida ülesannetele erinevaid lahendusviise.

Paljude ülesannete puhul saab lahenduse õigsust ka arvuti abil kontrollida. Algebraliste avaldiste, võrrandite (võrratuste) ja ka funktsiooni uurimisega seotud ülesannete puhul sobib selleks programm Wiris[1] ja mitmesuguste geomeetria- ja algebraülesannete puhul programm GeoGebra[2].

Allar Veelmaa

---

[1] Wiris – asub aadressil http://www.wiris.ee
[2] GeoGebra – asub aadressil http://www.geogebra.org

6. TRIGONOMEETRIA

Trigonomeetriliste avaldiste lihtsustamisel, samasuste tõestamisel ja võrrandite või võrratuste lahendamisel muudab ülesande lahendamine tihtipeale keerukaks see, et võimalikke lahendusteid on enam kui üks. Trigonomeetrilisi avaldisi sisaldavate ülesannete lahendamise üks võti peitub kindlasti *põhiseoste* ja nendest *tuletatud valemite* tundmisel.

6.1. Põhiseosed ja tuletatud valemid

Trigonomeetria põhiseosed

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ ja $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

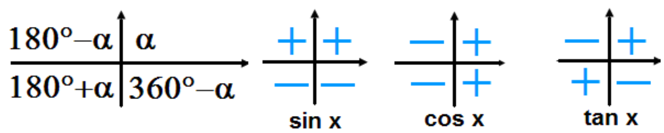
Esimene valem kehtib nurga α iga väärtuse korral (sel juhul on tegemist *absoluutse samasusega*). Teine ja kolmas valem kehtivad juhul, kui $\cos\alpha \neq 0$, s.t. $\alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Sellistel puhkudel on tegemist *tingimisi* samasustega.

Mõnikord kasutatakse ka valemit $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$, kus $\sin\alpha \neq 0$.

Taandamisvalemid

Taandamisvalemiteks nimetatakse valemeid, mis võimaldavad mistahes nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste leidmise taandada teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamisele.

Nende valemite meeldejätmiseks on otstarbekas kasutada järgmist skeemi:



Negatiivse nurga korral kehtivad seosed:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

Täispöördest suuremate (väiksemate) nurkade korral:

$\sin\left(\alpha + n\cdot 360^\circ\right) = \sin\alpha$, $\cos\left(\alpha + n\cdot 360^\circ\right) = \cos\alpha$ ja

$\tan\left(\alpha + n\cdot 180^\circ\right) = \tan\alpha$, kus $n \in \mathbb{Z}$.

Kahe nurga summa ja vahe siinus, koosinus ja tangens

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

Kahekordse nurga siinus, koosinus ja tangens

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \text{ ja } \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

Poolnurga siinus, koosinus ja tangens

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \text{ ja } \tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Summa ja vahe teisendamine korrutiseks

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \text{ ja}$$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Korrutise teisendamine summaks või vaheks

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left[1-\cos 2\alpha\right] \text{ ja } \cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left[1+\cos 2\alpha\right]$$

Näide 1. Lihtsustame avaldise $\sin 240^\circ \cos 150^\circ - \sin\left(-270^\circ\right) - \tan 315^\circ$.

Taandamisvalemite abil leiame iga teguri väärtuse eraldi:

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\sin(-270^\circ) = -\sin 270^\circ = -\sin(180^\circ + 90^\circ) = \sin 90^\circ = 1$ ja

$\tan 315^\circ = \tan(360^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1.$

Tulemused kokku võttes saame avaldise väärtuseks

$$\sin 240^\circ \cos 150^\circ - \sin\left(-270^\circ\right) - \tan 315^\circ = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 - (-1) = \frac{3}{4}.$$

Vastus: avaldise täpne väärtus kümnendmurruna on 0,75.

Näide 2. Lihtsustame avaldised:

a) $\tan 510° = \tan(3 \cdot 180° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

b) $\sin^2(\pi - \alpha) = \left[\sin(\pi - \alpha)\right]^2 = (\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha,$

c) $\cot\left(\alpha - 270^\circ\right) = -\cot\left(270^\circ - \alpha\right) = -\cot\left[180^\circ + (90^\circ - \alpha)\right] =$

$= -\cot(90^\circ - \alpha) = -\tan\alpha,$

d) $\sin(209\pi + \alpha) \cdot \cos(\alpha - 209\pi) + \tan 20\pi = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\alpha - \pi) =$

$= \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$

Näide 3. Lihtsustame avaldise $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x}$.

Kuna $1 + \cos 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x,$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ja $1 - \cos^2 x = \sin^2 x,$ siis

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x}.$$

Vastus: avaldise lihtsustatud kuju on $1 : \sin x$.

Näide 4. Teisendame korrutiseks $\cos 2x + \sin 3x - \cos 4x$.

Kuna $\cos 2x - \cos 4x = -2\sin\frac{2x+4x}{2}\sin\frac{2x-4x}{2} =$
$= -2\sin 3x \sin(-x) = 2\sin 3x \sin x$, siis
$\cos 2x - \cos 4x + \sin 3x = 2\sin 3x \sin x + \sin 3x = 2\sin 3x\left(\sin x + 0,5\right)$.

Vastus: tegurdatud avaldis on $2\sin 3x(\sin x + 0,5)$.

Näide 5. Leiame $\sin\frac{\alpha}{2}$, kui $\tan\alpha = \sqrt{3}$ ja α on kolmanda veerandi nurk.

Kui nurk α on kolmanda veerandi nurk ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$), siis $\frac{\alpha}{2}$ on teise veerandi nurk. Teises veerandis $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, seega $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Leiame $\cos\alpha$ valemi $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ abil: $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + (\sqrt{3})^2$ ehk
$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 4$, millest $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$.
Kolmandas veerandis on koosinuse väärtus negatiivne, s.t. $\cos\alpha = -0,5$.
Kokkuvõttes saame, et

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-(-0,5)}{2}} = \sqrt{\frac{1,5}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vastus: $\sin 0,5\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Näide 6. Tõestame, et $\frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x} = \frac{2 - \sin 2x}{2}$.

Teisendame võrduse vasakut poolt:

$$\frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x} = \frac{\left(\cos x + \sin x\right)\left(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x\right)}{\cos x + \sin x} =$$
$$= \cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \cos x = 1 - 0,5\sin 2x.$$

Saimegi sama tulemuse, mis on võrduse paremal poolel, sest:

$$\frac{2 - \sin 2x}{2} = \frac{2}{2} - \frac{\sin 2x}{2} = 1 - 0,5\sin 2x.$$

6.2. Trigonomeetriliste avaldiste teisendamine

261. Koostage valemid, mille abil saab nurga kraadimõõdust teisendada radiaanmõõtu ja vastupidi. Kumba mõõtu kasutatakse tänapäeval rohkem (tooge näiteid)? Uurige, milleks on taskuarvutil GRAD?

262. Teisendage nurk kraadimõõdust radiaanmõõtu ja vastupidi.

1) 45°; 225°; 3600°; –315°; 45°; 0°; 180°; 135°; 1°; 270°;

2) π; 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; 1; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{12}$; 2π; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; -3π; 6.

263. Leidke avaldise täpne väärtus mõistlikul viisil. Kontrollige tulemust kalkulaatori abil.

1) $\cos\alpha$, kui $\sin\alpha = 0{,}6$ ja $90° < \alpha < 180°$

2) $\sin\alpha$, kui $\tan\alpha = -\sqrt{3}$ ja $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

3) $\tan\alpha$, kui $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $270° < \alpha < 360°$

4) $\sin 2\alpha$, kui $\tan\alpha = -\sqrt{3}$ ja $90° < \alpha < 180°$

5) $\cos 2\alpha$, kui $\tan\alpha = -1$ ja $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

6) $\tan 2\alpha$, kui $\cos\alpha = -0{,}5$ ja nurk α on kolmanda veerandi nurk

7) $\cos 0{,}5\alpha$, kui $\sin\alpha = 0{,}6$ ja nurk α on teise veerandi nurk

8) $\sin 0{,}5\alpha$, kui $\tan\alpha = -\sqrt{3}$ ja nurk α on kolmanda veerandi nurk

9) $\tan 0{,}5\alpha$, kui $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ja nurk α on neljanda veerandi nurk

264. Lihtsustage avaldis taandamisvalemite abil.

1) $\sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \tan 45^\circ \tan 0^\circ$

2) $\tan 120^\circ \tan 330^\circ - \cos 0^\circ + \sin 225^\circ \cos 135^\circ$

3) $\sin 390^\circ \sin 510^\circ + \cos 570^\circ \cos 870^\circ + \tan 600^\circ \tan 1110^\circ$

4) $\dfrac{\sin 210^\circ + \cos 240^\circ - \cos 660^\circ}{\sin(-405^\circ) - \cos(-315^\circ) + \sin 540^\circ}$

5) $\dfrac{\tan 210^\circ \sin 420^\circ - 2\cos^2(-870^\circ) - 2\sin(-45^\circ)}{2\cos 405^\circ + \tan(-765^\circ)}$

265. Leidke kalkulaatorit kasutamata, kumb avaldistest on suurem?

1) sin 300° …. sin 320°
2) tan 32° …. tan 211°
3) cos 100° …. cos 260°
4) sin 100° …. sin 300°
5) tan (–44°) …. –tan 68°
6) sin 144° …. cos 144°
7) tan 99° …. tan 89°
8) cos(–400°) …. cos 410°

266. On antud $\sin\alpha + \cos\alpha = m$. Esitage arvu *m* kaudu

1) $\sin\alpha\cos\alpha$
2) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$

267. Leidke $\sin 2\alpha$, kui $\sin\alpha + \cos\alpha = m$.

268. Leidke $\sin^4 x + \cos^4 x$, kui $\sin x - \cos x = 0,5$.

269. Lihtsustage avaldis.

1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$

2) $\dfrac{(1-\sin x - \cos x)(1 - \sin x + \cos x)}{\sin x(1-\sin x)}$

3) $\dfrac{(1-\sin x\cos x)\sin x}{\sin x - \cos x}\cdot\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

4) $\dfrac{1-2\sin x\cos x}{2\cos^2 x - 1} - \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

5) $\dfrac{1+\cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\sin 2x + 2\sin x\cos 2x}$

270. Lihtsustage avaldis $\dfrac{2\cos x - \sin 2x}{\sin^2 x - \sin x + \cos^2 x}$ ja leidke nurgad, mille korral selle avaldise väärtus on (–1).

271. Leidke avaldise $\dfrac{\dfrac{1}{\tan\alpha} - \cos\alpha}{\dfrac{1}{\tan\alpha}}\cdot(1+\sin\alpha)$ väärtus, kui α = 60°.

272. Lihtsustage avaldised.

1) $\dfrac{1+2\cos x + \cos 2x}{1-2\cos x + \cos 2x}$
2) $\dfrac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4}$
3) $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\cos^6 x + \sin^6 x - 1}$
4) $\dfrac{-\sin 2x + 2\sin x}{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}$

5) $\dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)}$ 6) $\dfrac{\sin(30^\circ+x)-\sin(30^\circ-x)}{\sin(30^\circ+x)+\sin(30^\circ-x)}$

273. Lihtsustage avaldis.

1) $\dfrac{1-\cos 2\beta+\sin 2\beta}{1+\cos 2\beta+\sin 2\beta}$ 2) $\dfrac{\tan(x+y)-\tan x-\tan y}{\tan x\tan(x+y)}$

3) $\dfrac{\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x}{\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}$ 4) $\dfrac{\sin x-2\cos 3x-\sin 5x}{\cos x-2\sin 3x-\cos 5x}$

5) $\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}+\dfrac{1:\tan x}{1+1:\tan^2 x}$ 6) $\dfrac{2\sin 2x+\sin 4x}{2(\cos x+\cos 3x)}$

7) $\sin(x+y)\cos(x-y)+\cos(x+y)\sin(x-y)$

8) $(\cos x-\cos 2y)^2+(\sin x+\sin 2y)^2$

274. Nurgad A, B ja C on kolmnurga sisenurgad. Tõestage, et

1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$;

2) $\dfrac{\sin C}{\cos A\cdot\cos B}=\tan A+\tan B$.

275. Lihtsustage avaldis.

1) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$ 2) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}-\dfrac{\sin x+\cos x}{\tan^2 x-1}$

3) $\dfrac{\sin^2 x+\sin^4 x}{\cos^2 x+2\sin^2 x}+\dfrac{1+\cos^2 x}{2+\tan^2 x}$ 4) $\dfrac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\sin x+\cos x}-1+0,5\sin 2x$

276. Tõestage võrduse kehtivus.

1) $\sin(450^\circ+\alpha)+\sin(270^\circ-\alpha)-\cos(\alpha-180^\circ)=\cos\alpha$

2) $(\sin x+\cos x)^2-\cos x(1+2\cos x)\tan x=1-\sin x$

3) $\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x\cos^2 x-\sin^6 x-\cos^6 x=0$

4) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=1$

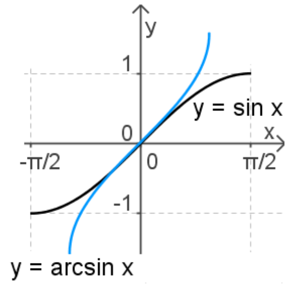
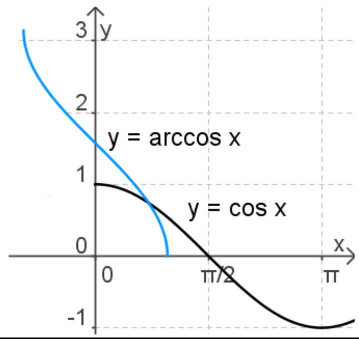
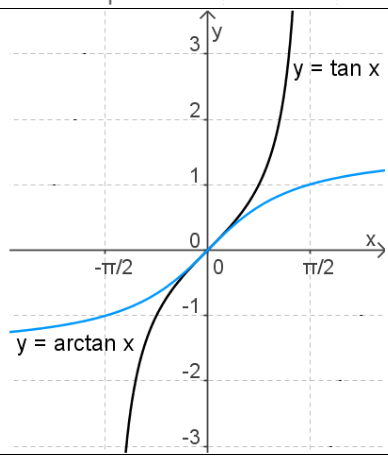
277. Tõestage, et $\dfrac{1}{8}\cos 4x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{3}{8}=\cos^4 x$.

278. Tõestage, et $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}=\frac{1}{32}$.

279. Tõestage, et $\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{256}$.

6.3. Arkusfunktsioonid

Arkusfunktsioonideks nimetatakse trigonomeetriliste funktsioonide teatavate ahendite pöördfunktsioone.

<table>
<tr><th>Funktsioon</th><th>Pöördfunktsioon</th><th>Graafikud</th></tr>
<tr><td>$y = \sin x$
$X = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$,
$Y = [-1; 1]$</td><td>$y = \arcsin x$
$X = [-1;1]$,
$Y = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$\arcsin(-x) = -\arcsin x$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y = \cos x$
$X = [0; \pi]$,
$Y = [-1; 1]$</td><td>$y = \arccos x$
$X = [-1;1]$,
$Y = [0;\pi]$
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y = \tan x$
$X = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$,
$Y =]-\infty;\infty[$</td><td>$y = \arctan x$
$X =]-\infty;\infty[$,
$Y = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
$\arctan(-x) = -\arctan x$</td><td>
</td></tr>
</table>

Kehtivad järgmised põhisamasused:

1. Iga $x \in [-1,1]$ korral $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

2. Iga $x \in \mathbb{R}$ korral $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$.

280. Arvutage funktsiooni väärtus.

1) arcsin 0,5	2) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$	3) arcsin (–1)
4) arccos 0,5	5) arccos (–0,5)	6) arccos 2009
7) $\arctan \sqrt{3}$	8) arctan (–2)	9) arctan 2009

281. Leidke funktsiooni väärtus.

1) $\sin(\arccos 0,5 + \arctan(-1)) + \cos(\arccos 0,5 + \arctan(-1))$

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arctan(-\sqrt{3})$

3) $\cos\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4) $\cos[2\arctan(-1) - \arccos(-0,5)]$

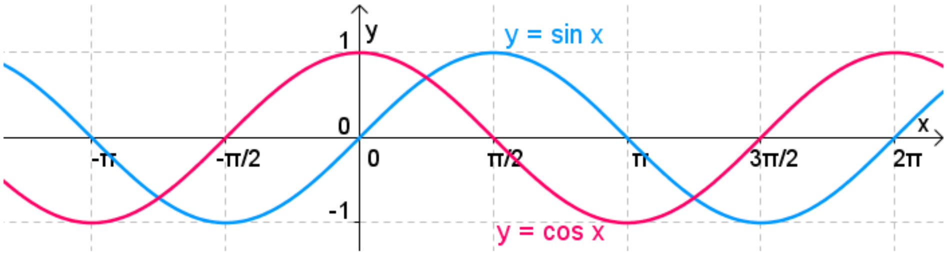
5) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$

282. Leidke funktsiooni määramispiirkond.

1) $f(x) = \arcsin 3x$	2) $f(x) = \arccos(-3x)$
3) $f(x) = \arcsin\frac{1-x}{1+x}$	4) $f(x) = \arccos\left(-\frac{1-x}{1+x}\right)$
5) $f(x) = \arctan 3x$	6) $f(x) = \arctan\left(1-3\sqrt[3]{x}\right)$
7) $f(x) = \arctan\frac{3}{1-x^{0,5}}$	8) $f(x) = \arccos(1-x) + \arctan \pi$

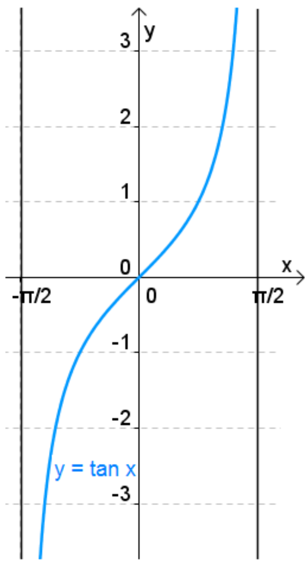
6.4. Funktsioonide omadused ja nende graafikud

Funktsiooni $y = \sin x$ graafikut nimetatakse *sinusoidiks*. Siinusfunktsiooni perioodi pikkus on 2π. Funktsioon on määratud kogu reaalarvude hulgal ja muutumispiirkond on lõik $[-1; 1]$.



Koosinusfunktsiooni $y = \cos x$ graafik on *koosinusoid*, mis ühtib oma kujult sinusoidiga, kuid on nihutatud $\frac{\pi}{2}$ võrra vasakule.

Tangensfunktsioon $y = \tan x$ on määratud, kui $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Funktsiooni graafikut nimetatakse *tangensoidiks*.



Kui funktsioon esitub kujul $y = A \cdot \sin kx$ või $y = A \cdot \cos kx$, siis arvust A sõltub graafiku võnkeamplituud ning arvust k võnkeperioodi pikkus T, $T = \frac{2\pi}{|k|}$.

Funktsiooni $y = A \cdot \tan k \cdot x$ graafiku võnkeperioodi pikkus on $T = \frac{\pi}{|k|}$.

283. Leidke funktsiooni graafiku perioodi pikkus.

1) $y = \sin 2x$ 2) $y = \cos 0{,}5x$ 3) $y = \tan \frac{x}{3}$

4) $y = \sin \frac{3\pi x}{4}$ 5) $y = \cos 5x$ 6) $y = \tan (-3x)$

284. Joonestage ühes teljestikus funktsioonide $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ graafikud $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$.

285. Joonestage ühes teljestikus funktsioonide $y = \cos x$ ja $y = \cos 0{,}5x$ graafikud $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

286. Selgitage, kuidas saab konstrueerida järgmiste funktsioonide graafikud funktsiooni $y = \sin x$ graafiku abil[1].
1) $y = 3\sin x$ 2) $y = -\sin x$ 3) $y = 2\sin x$ 4) $y = |\sin x|$ 5) $y = \cos x$

287. Joonestage lõigus $[-\pi; \pi]$ funktsioonide $y = 4\sin 2x$, $y = -\cos 0{,}5x$ ja $y = 2\cos\frac{x}{2}$ graafikud. Leidke graafikute abil nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning ekstreemumkohad ja ekstreemumid.

6.5. Trigonomeetrilised võrrandid

Trigonomeetrilisteks võrranditeks nimetatakse võrrandeid, kus tundmatu on trigonomeetrilise funktsiooni argumendis.

Keerukamate trigonomeetriliste võrrandite puhul teisendatakse tundmatut sisaldavaid avaldisi seni, kuni võrrandi lahendamine taandub ühe või mitme *trigonomeetrilise põhivõrrandi* lahendamisele.

Trigonomeetrilised põhivõrrandid on:

$\sin x = m$, kus $|m| \leqslant 1$ ja üldlahend on $x = (-1)^n \arcsin m + n\pi$, kus $n \in \mathbb{Z}$,

$\cos x = m$, kus $|m| \leqslant 1$ ja üldlahend on $x = \pm\arccos m + 2n\pi$, kus $n \in \mathbb{Z}$ ja

$\tan x = m$, kus $m \in \mathbb{R}$ ja üldlahend on $x = \arctan m + n\pi$, kus $n \in \mathbb{Z}$.

Trigonomeetriliste võrrandite lahendeid on mõistlik kontrollida, sest teisenduste käigus (näiteks võrduse poolte ruutu tõstmisel) võivad tekkida võõrlahendid. Võrduse poolte jagamisel ühe ja sama avaldisega tuleb veenduda selles, et nii tehes osa lahenditest kaotsi ei läheks.

Märkus: lihtsate trigonomeetriliste võrrandite lahendamisel ei ole vaja kasutada üldist lahendivalemit (kuid võib). Liites (lahutades) n-kordse perioodi pikkuse, saame jällegi lähtevõrrandi lahendi. Sõltuvalt võrrandi lahendamisel kasutatud võtetest *ei pruugi lahendid esituda ühesel viisil*.

[1] Graafikute konstrueerimise õppimisel on otstarbekas kasutada arvutiprogramme Wiris ja GeoGebra.

Näide 1. Lahendame võrrandi $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ kolmel erineval viisil.

1) Kui $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, siis arvestades seda, et siinusfunktsiooni perioodi pikkus on 2π, saame lõigus $[0; 2\pi]$ kaks lahendit: $\frac{\pi}{4}$ ja $\frac{3\pi}{4}$. Liites mõlemale leitud lahendile täisarv n kordse perioodi pikkuse 2π, võime esialgse võrrandi lahendid esitada kahe *lahendiseeriana*:

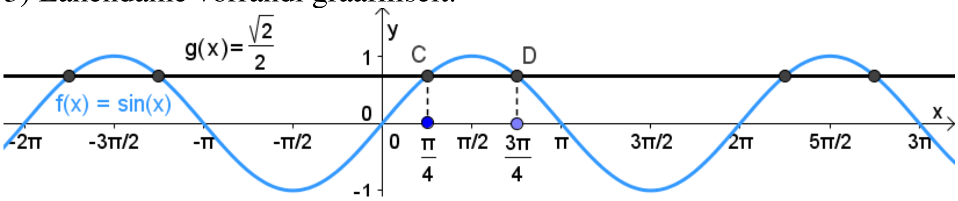
a) $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ ja $x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$, kus n on suvaline täisarv.

2) Võrrandi $\sin x = m$ üldlahendi valemi järgi saame:

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + n\pi = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi, \text{ kus } n \in \mathbb{Z}.$$

Kui $n = 0$, siis $x = \frac{\pi}{4}$; kui $n = 1$, siis $x = \frac{3\pi}{4}$.

3) Lahendame võrrandi graafiliselt.



Joonestame sinusoidi $y = \sin x$ ja sirge $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Siinusfunktsiooni perioodi pikkus on 2π, seega on tarvis leida esmalt võrrandi lahendid ühe perioodi piires. Lõigul $[0; 2\pi]$ on võrrandil kaks lahendit: $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{3\pi}{4}$. Liites lahenditele x_1 ja x_2 siinusfunktsiooni täisarv kordse perioodi pikkuse (-4π; -2π; …; 100π) saame võrrandi kõik lahendid esitada nii:

$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ ja $x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$, kus n on suvaline täisarv

Esimesel ja kolmandal juhul saime kaks lahendiseeriat, üldvalemit kasutades on needsamad lahendiseeriad kirja pandud ühe valemina.

<u>Vastus:</u> võrrandi üldlahend on $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi$, kus $n \in \mathbb{Z}$.

Trigonomeetriliste võrrandite erilahendeid saab kontrollida ka programmi **Wiris** abil, esimeses näites oleva võrrandi lahendid saame nii:

lahenda$(\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow \{\{x=\frac{\pi}{4}\},\{x=\frac{3\cdot\pi}{4}\}\}$

Märkus: lahendiseeriate esitamise muudab mõnikord tülikaks see, et üks leitud lahendiseeriatest sisaldub ka teises lahendiseerias (täielikult või osaliselt).

Näide 2. Esitame lahendiseeriad $\frac{\pi}{2}+n\pi$ ja $\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$, kus $n,k\in\mathbb{Z}$ ühe lahendiseeriana.

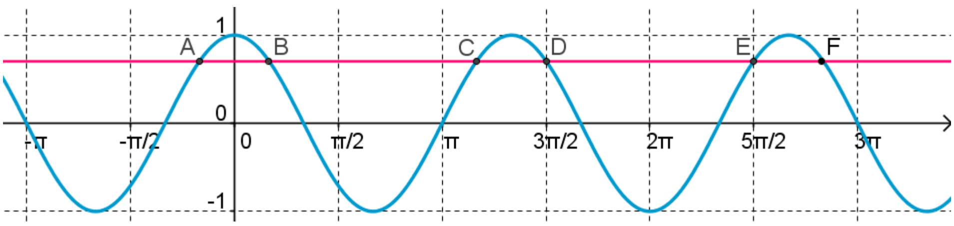
Kõik esimesse seeriasse kuuluvad lahendid on ka teises lahendiseerias (kuid mitte vastupidi). Sellisel juhul on esimene lahendiseeria ülearune ja võrrandi lahendid esitatakse kujul $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Märkus: üldlahendi esitamine on keerukam juhul, kui kahel (või enamal) lahendiseerial on ühiseid lahendeid, kuid ükski nendest seeriatest ei sisaldu tervikuna mõnes teises. Lahendiseeriad $\frac{n\pi}{5}$ ja $\frac{k\pi}{2}$ (n, $k\in\mathbb{Z}$) ei sisaldu teineteises, kuid omavad ühiseid lahendeid (näiteks juhul n = 5 ja k = 2). Püüdke need lahendiseeriad esitada nii, et nendes korduvaid lahendeid ei ole.

Näide 3. Mitu lahendit on võrrandil $\cos 1{,}5x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ lõigus $[-\pi, 3\pi]$?

Ülesande lahendamiseks võime leida üldlahendi ja selle abil need lahendid, mis kuuluvad lõiku $[-\pi, 3\pi]$. Võrrandi lahendite arvu saab määrata ka lihtsamalt – selleks skitseerime funktsioonide $y=\cos 1{,}5x$ ja $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ graafikud ja loeme jooniselt graafikute lõikepunktide (võrrandi lahendite) arvu.

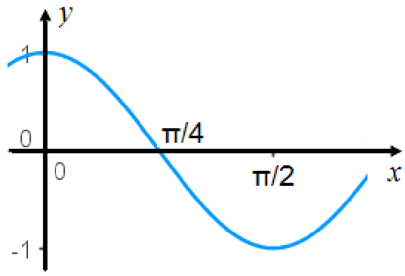
Jooniselt näeme, et võrrandil on ette antud lõigus 6 lahendit.



Leidke võrrandi $\cos 1{,}5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *üldlahend ja leidke selle abil täpsed lahendid lõigust* $[-\pi, 3\pi]$.

Näide 4. Missuguste arvu m väärtuste korral on võrrandil $\cos 2x = 2 - 3m$ lahendid lõigus $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$?

Kui $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, siis $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 0$.



Lahendame võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} 2 - 3m \leqslant 0 \\ 2 - 3m \geqslant -1. \end{cases}$$

Selle võrratusesüsteemi lahendamisel saame, et $\frac{2}{3} \leqslant m \leqslant 1$.

<u>Vastus:</u> $m \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$.

Näide 5. Lahendame võrrandi $2\cos x \cdot \cos 2x = \cos x$.

Viime $\cos x$ võrduse vasakule poolele ja toome selle sulgude ette:
$\cos x\,(2\cos 2x - 1) = 0$, millest järeldub, et
$\cos x = 0$ või $2\cos 2x - 1 = 0$.
Esimese võrrandi lahendid on

$$x = \pm \arccos 0 + 2n\pi = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \text{ kus } n \in \mathbb{Z}.$$

Lahendame teise võrrandi:
$2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0{,}5$ ja lahendivalemi järgi

$$2x = \pm \arccos 0{,}5 + 2m\pi = \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi, \text{ millest } x = \pm \frac{\pi}{6} + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}.$$

<u>Vastus:</u> $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\quad x = \pm \frac{\pi}{6} + m\pi\ \ (n, m \in \mathbb{Z})$.

Kasulik teada! Mõningate lihtsate trigonomeetriliste võrrandite lahendeid pole otstarbekas leida üldlahendi kaudu. Need leiame nii, nagu on näidatud näites 1 (v.t. 3. alajuht).

Võrrandi $\sin x = 0$ lahendid on $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$;

$\cos x = 0$ lahendid on $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$;

$\sin x = 1$ lahendid on $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

$\cos x = -1$ lahendid on $x = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Analoogiliselt saab leida ka võrrandite $\sin x = -1$ ja $\cos x = 1$ lahendid.

Näide 6. Leiame võrrandi $\sin^2 x - \sin x = 0$ lahendid vahemikust $]-2\pi; 2\pi[$.

Võrrandi $\sin^2 x - \sin x = 0$ esitame kujul
$\sin x\,(\sin x - 1) = 0$, millest
$\sin x = 0$ või $\sin x = 1$.

1) Kui $\sin x = 0$, siis $x = n\pi$, kus n on täisarv. Vahemikku $]-2\pi; 2\pi[$ kuulub kolm lahendit: $-\pi$; 0 ja π.

2) Kui $\sin x = 1$, siis $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$; vaadeldavasse vahemikku kuulub kaks lahendit: $-1{,}5\pi$ ja $0{,}5\pi$.

Vastus: otsitavad lahendid on $-1{,}5\pi$; $-\pi$; 0; $0{,}5\pi$ ja π.

Näide 7. Lahendame võrrandi $6\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 3$.

Asendame arvu 3 avaldisega $3\sin^2 x + 3\cos^2 x$, saame
$6\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$.
Toome kõik liikmed vasakule poolele ja koondame sarnased liikmed:
$3\sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$.

Tegemist on *homogeense võrrandiga*, mille lahendamiseks jagatakse võrrandi mõlemad pooled $\cos^2 x$ – ga ($\cos x \neq 0$).

Saime ruutvõrrandi $\tan x$ suhtes
$3\tan^2 x - \tan x - 4 = 0$, millest

$\tan x = -1$, $x = \arctan(-1) + n\pi = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ ja

$\tan x = \frac{4}{3}$, $x = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Vastus: $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $x = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + m\pi$, $(n, m \in \mathbb{Z})$.

Näide 8. Lahendame võrrandi $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

Selle võrrandi lahendamiseks teisendame võrduse vasakut poolt nii, et saaks kasutada kahe nurga summa siinuse valemit:

$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}$, millest

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1.$

Kuna $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, siis võime võrrandi ümber kirjutada kujule

$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 1$ ehk

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1,$ millest

$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin 1 + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ ehk $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

Näidake iseseisvalt, et võrrandi lahendid saab esitada ka kujul

$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

<u>Vastus:</u> $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

Näide 9. Lahendame võrrandi $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$.

Teisendame vahe $\sin 2x - \sin 4x$ korrutiseks:

$\sin 2x - \sin 4x = 2\sin\frac{2x-4x}{2}\cos\frac{2x+4x}{2} = -2\sin x \cdot \cos 3x.$

Esialgse võrrandi saab nüüd esitada nii:

$\cos 3x - 2\sin x \cos 3x = 0.$

Edasi lahendame nii, nagu 5. näites, s.t.

$\cos 3x(1 - 2\sin x) = 0.$

Lahendades võrrandid $\cos 3x = 0$ ja $\sin x = \frac{1}{2}$ saame kaks lahendihulka

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$ ja $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}.$

Teine lahendiseeria sisaldub tervikuna esimeses lahendiseerias (veenduge selles) ja seetõttu ei pea seda vastuses eraldi välja tooma.

<u>Vastus:</u> $x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$

288. Leidke võrrandi üldlahend ja erilahendid lõigus $[-\pi, 2\pi]$.

1) $\sin x = 1$ 2) $\cos x = -0{,}5$ 3) $\tan x = \sqrt{3}$

4) $\cos x = 2009$ 5) $\sin(-x) = -1$ 6) $\tan x = -1$

289. Leidke võrrandi üldlahend.

1) $\sin 3x = 0{,}5$ 2) $\cos(3x + 1) = 0{,}5$

3) $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 6) $\cos(\pi x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

290. Lahendage võrrand, mis teisendub ühele ja samale funktsioonile või lahutub tegureiks (v.t. näidet 5)

1) $2\sin x + \sin 2x = 0$ 2) $\cos 2x + \cos x = 0$
3) $\sin 2x = \sin x$ 4) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$
5) $\tan^2 x + 3\tan x = 0$ 6) $\cos^2 x = \sin^2 x$
7) $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$ 8) $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x$

291. Lahendage võrrand, mis on homogeenne või teisendub homogeenseks (v.t. näidet 7).

1) $\sin x + \cos x = 0$ 2) $\cos 3x + \sin 3x = 0$
3) $\sin 2x = \cos 2x$ 4) $\sqrt{3}\sin x = \cos x$
5) $2\sin^2 x+\cos^2 x+3\sin x\cos x=0$ 6) $3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$

292. Lahendage võrrand $2\sin^2 x + 4\cos^2 x = m$, kui võrrandi üks lahend on 60° ja $-360° < x < 360°$.

293. Lahendage võrrand sobivalt valitud võtte abil.

1) $\sin^2 x = 1$ 2) $4\sin^2 x-1=0$
3) $4\cos^2 x-4\cos x-3=0$ 4) $2\tan x = \sin x$
5) $9\sin^2 x-27\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=10$ 6) $\frac{3\sin x-2\cos(\pi+x)}{\sin x-\cos(\pi+x)}=\frac{1}{2}$
7) $\cos\left(x+120^\circ\right)=-\sqrt{3}\sin x$ 8) $\cos 5x = -\sin 2x \sin 3x$
9) $\cos^3 \sin x + \sin^3 x\cos x = \frac{1}{4}$ 10) $\cos x+\sin x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$
11) $\sin 4x + \sin x = \sin 3x + \sin 2x$
12) $\cos x\cos 4x + \sin x\sin 4x = -\sin x$

294. On antud funktsioon $f(x) = \sin x + \cos x$.

1) Leidke funktsiooni $f(x)$ väärtuste hulk
2) Lahendage võrrand $[f(x)]^2=1$
3) Arvutage $f\left(\frac{11\pi}{6}\right)-f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

295. Vaatleme funktsioone $f(x) = \sin 2x$ ja $g(x) = \sin x$.

1) Avaldage $\sin 2x$ suuruse $\sin x$ kaudu.
2) Lahendage võrrand $f(x) = g(x)$ lõigul $[0; 2\pi]$.
3) Joonestage ühes ja samas teljestikus mõlema funktsiooni graafik.
4) Leidke joonise abil need vahemikud lõigus $[0; 2\pi]$, kus $f(x) \leqslant g(x)$.

296. Joonestage funktsiooni $f(x) = \dfrac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2 + \cos 2x}$ graafik lõigus $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Võrrelge seda graafikut funktsiooni $y = \tan x$ graafikuga.

297. Leidke võrrandi $\sin^2 x = |\sin x|$ lahendid lõigus $[-\pi; \pi]$.

298. Leidke võrrandi $\sin x = \sin |x|$ lahendid lõigus $[-2\pi; 2\pi]$.

SISUKORD